

- Proposition:
- (1) Une famille libre de  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  forme une base de  $\mathbb{R}^n$ .
  - (2) Une famille de  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  qui engendrent  $\mathbb{R}^n$  forme une base de  $\mathbb{R}^n$ .

Preuve:

(1) Soit  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  une famille libre de  $\mathbb{R}^n$ . On obtient une matrice  $A = (\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n)$  de taille  $n \times n$ . L'éq.  $A\vec{x} = \vec{0}$  admet au moins une solution (la solution triviale)  $\Rightarrow \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} = \mathbb{R}^n$   
 $\uparrow$   
th. 5 p. 38

- (2) Considérons  $n$  vecteurs  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  avec  $\text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} = \mathbb{R}^n$ . Alors chaque ligne (et colonne car la matrice est carrée  $n \times n$ ) admet un pivot  
 $\Rightarrow$  il n'y a que des variables de base  
 $\Rightarrow$  il y a une unique solution, qui est forcément la solution triviale  
 $\Rightarrow$  la famille est libre.